Über ein bestimmtes Integral und einen dazugehörigen konvexen Körper

Rieger, G.J.

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 24, 1973/74, S.53-60

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über ein bestimmtes Integral und einen dazugehörigen konvexen Körper

Von G. J. Rieger

Vorgelegt von Th. Kaluza

(Eingegangen am 13. 8. 1974)

Übersicht: Durch die eine Gleichung (1) für die drei reellen Variablen a, b, c ist eine beschränkte konvexe Fläche im dreidimensionalen Raum bestimmt, deren Gestalt und Eigenschaften im einzelnen untersucht werden. Diese Fläche ist einmal stetig differenzierbar und nicht zweimal differenzierbar.

Summary: The one equation (1) for the three real variables a, b, c determines in three-dimensional space a bounded convex surface whose shape and properties are investigated in detail. This surface is once continuously differentiable and not twice differentiable.

Für $(a, b, c) \in \mathscr{R}^3$ sei $J(a, b, c) := \int\limits_{-1}^{1} |a + bx + cx^2|\, dx$. Wir möchten die Menge K bzw. H aller (a, b, c) mit $J(a, b, c) \leqq 1$ bzw.

$$J(a, b, c) = 1 \tag{1}$$

näher untersuchen. K ist konvex mit $(0, 0, 0)$ als Mittelpunkt und innerem Punkt und hat H als Rand und $b = 0$ als Symmetrieebene.

Es bezeichne H^* die Menge aller $(a, b) := (a, b, 0)$ mit $J(a, b, 0) = 1$. Man hat sofort

Satz A. *H^* besteht aus der Strecke von $(1/2, -1/2)$ nach $(1/2, 1/2)$, der Halbkreislinie von $(1/2, 1/2)$ über $(0, 1)$ nach $(-1/2, 1/2)$, der Strecke von $(-1/2, 1/2)$ nach $(-1/2, -1/2)$ und der Halbkreislinie von $(-1/2, -1/2)$ über $(0, -1)$ nach $(1/2, -1/2)$.*

Es sei $f(x) := a + bx + cx^2$. Man hat

$$c \neq 0 \Rightarrow \left(f(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}\right) \tag{2}$$

mit der Deutung $\sqrt{} \geqq 0$. Für f sind folgende Fälle möglich:

(P_0) f hat keine einfache Nullstelle in $I :=]-1, 1[$;

(P_1) f hat genau eine einfache Nullstelle σ_0 in I;

(P_2) f hat genau zwei einfache Nullstellen $\sigma_1 < \sigma_2$ in I.

Mit der Stammfunktion

$$\varphi(x) = a x + \frac{b x^2}{2} + \frac{c x^3}{3} \tag{3}$$

von f gilt

$$(\mathrm{P}_0) \Rightarrow J(a, b, c) = |\varphi(1) - \varphi(-1)| = \left|2a + \frac{2c}{3}\right|. \tag{4}$$

$$(\mathrm{P}_1) \Rightarrow J(a, b, c) = |(\varphi(1) - \varphi(\sigma_0)) - (\varphi(\sigma_0) - \varphi(-1))| = |b - 2\varphi(\sigma_0)|, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_2) \Rightarrow J(a, b, c) &= |(\varphi(1) - \varphi(\sigma_2)) - (\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)) + (\varphi(\sigma_1) - \varphi(-1))| \\ &= \left|2a + \frac{2c}{3} + 2\varphi(\sigma_1) - 2\varphi(\sigma_2)\right|.\end{aligned} \tag{6}$$

Es gilt $(\mathrm{P}_1) \Rightarrow b = f'(0) \neq 0$, und das Vorzeichen in (5) richtet sich nach dem von $f(1) - f(-1) = 2\mathrm{b}$; wegen

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x)\, x^{-2} = c \tag{7}$$

ist für $b = f'(0) > 0$ und $c > 0$ bzw. $c < 0$ in (5) dabei σ_0 die größere bzw. kleinere der beiden einfachen reellen Nullstellen von f, und wir haben über (2) hinaus

$$\sigma_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \qquad (b > 0,\ c \neq 0) \tag{8}$$

und natürlich $a + b\sigma_0 + c\sigma_0^2 = 0$; für $c = 0$ deuten wir die Formel in (8) als $a + b\sigma_0 = 0$, was auch durch Grenzübergang $c \to 0$ in (8) herauskommt. Das Vorzeichen in (6) richtet sich wegen (7) nach dem von c.

Durch Rechnen mit Ungleichungen (und nach dem Zwischenwertsatz) folgt leicht

Lemma P. *Es gilt*

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_0) \Leftrightarrow (b^2 \leqq 4ac &\vee (b^2 > 4ac \wedge f(-1) \geqq 0 \wedge f(1) \geqq 0 \wedge a > c) \\ &\vee (b^2 > 4ac \wedge f(-1) \leqq 0 \wedge f(1) \leqq 0 \wedge a < c)),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_1) \Leftrightarrow (f(-1)\, f(1) < 0 &\vee (f(1) = 0 \wedge f(-1)\, f'(1) > 0) \\ &\vee (f(-1) = 0 \wedge f(1)\, f'(-1) < 0)),\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_2) \Leftrightarrow (b^2 > 4ac &\wedge f(1) > 0 \wedge f(-1) > 0 \wedge a < c) \\ &\vee (b^2 > 4ac \wedge f(1) < 0 \wedge f(-1) < 0 \wedge c < a).\end{aligned} \tag{11}$$

Die Menge der Punkte von H mit $(\mathrm{P}_0) \wedge 2a + \frac{2c}{3} > 0$, $(\mathrm{P}_0) \wedge 2a + \frac{2c}{3} < 0$, $(\mathrm{P}_1) \wedge b > 0$, $(\mathrm{P}_1) \wedge b < 0$, $(\mathrm{P}_2) \wedge c > 0$, $(\mathrm{P}_2) \wedge c < 0$ bezeichnen wir in dieser Reihenfolge mit $S_v, S_h, F_r, F_l, D_o, D_u$ und nennen sie vorderer Schild, hinterer Schild, rechte Flanke, linke Flanke, oberer Deckel, unterer Deckel. Diese sechs Mengen bilden eine disjunkte Zerlegung von H. Es bezeichne τ die Spiegelung an $(0, 0, 0)$; es ist $S_h = \tau S_v$, $F_l = \tau F_r$, $D_u = \tau D_o$.

Aus (9), (4), (1) folgt leicht

Satz 0. *S_v ist diejenige in der Ebene*

$$2a + \frac{2c}{3} = 1 \tag{12}$$

enthaltene beschränkte abgeschlossene Menge, welche durch den von $(\frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{8})$ *über* $(0, 0, \frac{3}{2})$ *nach* $(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8})$ *führenden Ellipsenbogen, dessen Punkte* (a, b, c) *die Gleichungen* $b^2 = 4ac$ *und* (12) *erfüllen, und durch die Strecken von* $(\frac{3}{4}, 0, -\frac{3}{4})$ *nach* $(\frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{8})$ *und von* $(\frac{3}{4}, 0, -\frac{3}{4})$ *nach* $(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8})$ *begrenzt ist.*

Die Menge der Punkte von H mit $f(-1)\,f(1) < 0 \wedge b > 0$ bzw. $f(-1)\,f(1) < 0 \wedge b < 0$ bezeichnen wir mit F'_r bzw. F'_l; es ist $F'_l = \tau F'_r \subseteqq F_l$. Es gilt $f(-1)\,f(1) < 0 \wedge b > 0 \Leftrightarrow f(-1) < 0 \wedge f(1) > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$. Aus (1), (10), $b > 0$, (5) mit der anschließenden Vorzeichenbemerkung, (3), (8) folgt

$$J(a, b, c) = \frac{1}{6c^2}\left(6bc^2 + 6abc - b^3 + \sqrt{b^2 - 4ac}^{\,3}\right) = 1 \qquad (c \neq 0); \tag{13}$$

für $c = 0$ deuten wir diese Formel als die stetige Fortsetzung

$$J(a, b, 0) = b + a^2 b^{-1} = 1, \tag{14}$$

was auch im Einklang mit Satz A steht. Wir haben also

Hilfssatz 1. *Die Punkte von F'_r sind gekennzeichnet durch*

$$a - b + c < 0 \wedge a + b + c > 0 \wedge (13).$$

Für die (14) erfüllende Halbkreislinie $F'_r \cap H^*$ wählen wir die Parameterdarstellung $(t(1 + t^2)^{-1}, (1 + t^2)^{-1}, 0)$ mit $|t| < 1$; vermöge der Parameterdarstellung

$$a = t(1 + t^2)^{-1}\left(1 + t(t^2 - 3)\frac{c}{3}\right), \quad b = (1 + t^2)^{-1}\left(1 + 4t^3\frac{c}{3}\right) \tag{15}$$

erweist sich (13) als abwickelbare Fläche; zusammen mit den Ungleichungen von Hilfssatz 1 folgt, daß die Punkte (a, b, c) der Fläche F'_r gekennzeichnet sind durch

$$|t| < 1 \wedge -\psi(-t) < c < \psi(t) \wedge (15) \quad \text{mit} \quad \psi(t) := 3(3 + 3t + 3t^2 - t^3)^{-1}.$$

Man geht leicht zu F_r über und findet

Satz 1. *Die Punkte (a, b, c) der abwickelbaren Fläche F_r sind gekennzeichnet durch* $|t| < 1 \wedge -\psi(-t) \leqq c \leqq \psi(t) \wedge (15)$.

Die den verschiedenen t entsprechenden Geraden (15) sind paarweise windschief.

Man hat $f(1) > 0 \wedge f(-1) > 0 \wedge a < c \Rightarrow c > |a|$ und $f(1) < 0 \wedge f(-1) < 0 \wedge c < a \Rightarrow -c > |a|$; wegen (11) gilt daher

$$(\mathrm{P}_2) \wedge c > 0 \Leftrightarrow b^2 > 4ac \wedge f(1) > 0 \wedge f(-1) > 0 \wedge a < c.$$

Aus (1), (11), $c > 0$, (6) mit der anschließenden Vorzeichenbemerkung, (3), (2) folgt

$$J(a, b, c) = 2a + \frac{2c}{3} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}^{\,3}}{3c^2} = 1, \tag{16}$$

was sich leicht nach b lösen läßt. Wir haben also

Hilfssatz 2. *Die Punkte* (a, b, c) *von* D_o *sind gekennzeichnet durch* $b^2 > 4ac \wedge a + b + c > 0 \wedge a - b + c > 0 \wedge a < c \wedge (16)$.

Für $s \in \mathscr{R}$ bezeichne E_s den Durchschnitt von D_o mit der Ebene

$$a = \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{3} s^3)\, c. \tag{17}$$

(Nach einem Ansatz $2a + uc = 1$ mit dem Büschelparameter u überzeugt man sich beim Rechnen rasch von der Zweckmäßigkeit von (17).) In jedem Punkt von S_v ist (12) Tangentialebene an K, und wegen $(a, b, c) \in D_o \Rightarrow c > 0$ kann man sich auf $s > 0$ beschränken. (16) ergibt mit (17) genau

$$b^2 + g(s)\, c^2 = 2c \wedge (17) \tag{18}$$

mit $g(s) := \frac{4}{3}(1 - 3s^2 + 4s^3)$; für festes $s > 0$ ist (18) wegen $g(s) > 0$ eine Ellipse E_s^0 mit der rationalen Parameterdarstellung

$$b = \frac{2z}{g(s) + z^2} \wedge c = \frac{2}{g(s) + z^2} \wedge (17) \tag{19}$$

$(z \in \mathscr{R} \vee z = \infty)$; es ist $E_s \subseteqq E_s^0$. Zusammen mit den Ungleichungen von Hilfssatz 2 folgt

Satz 2. *Die Punkte* (a, b, c) *von* D_o *sind gekennzeichnet durch* $0 < s < 1 \wedge |z| < 2(1 - s) \wedge (19)$.

D_o enthält keine Strecken. Ferner ist $\lim\limits_{0 < s \to 0} E_s = E$.

Wir fassen zusammen: jeder der beiden Schilde ist eben; jede der beiden Flanken ist die disjunkte Vereinigung von Strecken; jeder der beiden Deckel ist die disjunkte Vereinigung von Ellipsenbögen.

In jedem Punkt von S_v ist (12) Tangentialebene an K; nach Satz 1 haben wir in jedem Punkt der Strecke $a = 0 \wedge b = 1 \wedge |c| \leqq 1$ die Tangentialebene $b = 1$ an K; nach (16) haben wir im Punkt $(-1/2, 0, 2)$ die Tangentialebene $c = 2$ an K. Das führt leicht auf

Satz B. *Durch* $\left|2a + \frac{2c}{3}\right| \leqq 1 \wedge |b| \leqq 1 \wedge |c| \leqq 2$ *erhalten wir für* K *ein umschriebenes Parallelepiped; der Durchschnitt seines Randes mit* H *besteht genau aus den beiden Flächen* S_v *und* S_h, *den beiden Strecken* $a = 0 \wedge |b| = 1 \wedge |c| \leqq 1$ $(\subseteqq F_r \cup F_l)$ *und den beiden Punkten* $(\mp 1/2, 0, \pm 2)$ $(\in D_o \cup D_u)$.

E_1 erweist sich als die Menge derjenigen Punkte von D_o, in denen die Tangentialebene parallel ist zur a-Achse. Zusammen mit Satz B folgt, daß die senkrechte Projektion von K in die Ebene $a = 0$ besteht aus der Strecke von $(0, 1, -1)$ nach $(0, 1, 1)$, der Halbkreislinie von $(0, 1, 1)$ über $(0, 0, 2)$ nach $(0, -1, 1)$ und deren Bilder bei τ.

K ist beschränkt und konvex; daher ist H stetig. Wegen $H^* \subsetneqq H$ ist H nicht zweimal differenzierbar. Doch gilt

Satz C. *Die Fläche H ist stetig differenzierbar.*

Beweis. Da die Punkte $(a, b, c) \in H$ mit $b^2 \leqq 4ac$ alle in den ebenen Flächen S_v und S_h liegen, folgert man aus (12), (13), (16) und τ, daß die Schilde, Flanken und Deckel analytische Flächen sind. Es bezeichne T bzw. B bzw. E die Trennlinie von S_v und F_r bzw. F_r und D_o bzw. D_o und S_v. Aus Symmetriegründen muß nur noch gezeigt werden, daß bei Annäherung von beiden Seiten an diese Trennlinien dieselbe Tangentialebene entsteht. Es sei $w := \sqrt{b^2 - 4ac}$. i) Es ist T die in Satz 0 zweitgenannte Strecke; für $(a, b, c) \in T$ gilt somit $a - b + c = 0 \wedge (12) \wedge |c| \leqq a$ und daher $w = a - c$; im Hinblick auf (13) sei $g := 6bc^2 + 6abc - b^3 + w^3 - 6c^2$; für $(a, b, c) \in T$ folgt (für die partiellen Ableitungen) $g_a = 12c^2$, $g_b = 0$, $g_c = 12c(2a + c - 1)$ und $g_a = 3g_c \wedge g_b = 0$, wie es nach (12) sein soll. ii) Die Punkte (a, b, c) von B sind wegen Satz 1 gekennzeichnet durch $|t| < 1 \wedge c = \psi(t) \wedge (15)$; für $(a, b, c) \in B$ gilt somit $a - b + c = 0 \wedge c \geqq |a|$ und daher $w = c - a = 2c - b$; im Hinblick auf (16) sei $h = 6ac^2 + 2c^3 + w^3 - 3c^2$; für $(a, b, c) \in B$ folgt $g_a = 2h_a$, $g_b = 2h_b$, $g_c = 2h_c$. iii) Es ist E der Ellipsenbogen aus Satz 0; für $(a, b, c) \in E$ gilt somit $(12) \wedge w = 0$ und daher $h_a = 3h_c \wedge h_b = 0$, wie es nach (12) sein soll. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir heben einige ebene Schnitte von H hervor. H^* ist der Schnitt von H mit $c = 0$. Es bezeichne $H^{(a)}$ bzw. $H^{(b)}$ den Schnitt von H mit $a = 0$ bzw. $b = 0$.

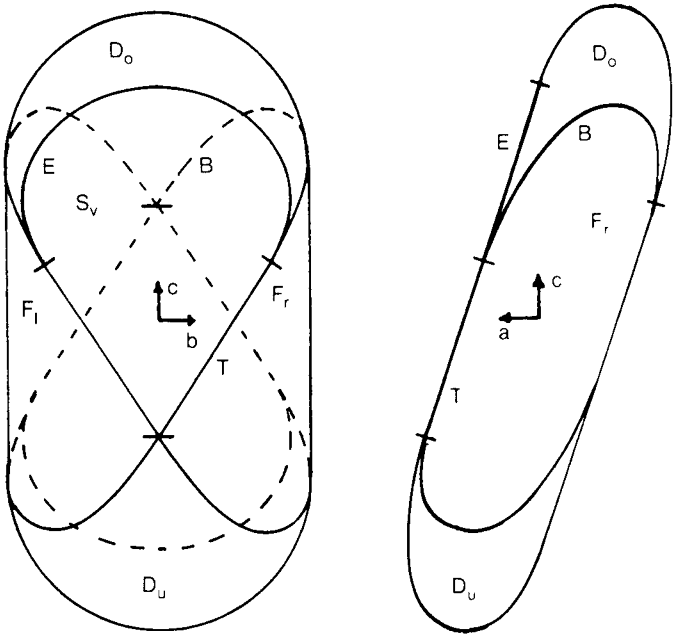
Wegen (16), (13) und τ besteht $H^{(a)}$ aus dem Bogen der Kurve $2c^3 + b^3 = 3c^2 \wedge a = 0$ von $(0, 0, \frac{3}{2})$ nach $(0, 1, 1)$, aus der Strecke von $(0, 1, 1)$ nach $)0, 1, 0)$ und deren Spiegelbilder bezüglich $c = 0$ und dann bezüglich $b = 0$; der erwähnte Bogen hat die Parameterdarstellung $c = 3(2 + t^3)^{-1} \wedge b = tc \wedge a = 0$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ und dringt nicht in die Ellipse $b^2 + 4(c - 1)^2 < 1 \wedge a = 0$ ein.

Wegen (12), (16) und τ besteht $H^{(b)}$ aus der Strecke von $(\frac{3}{4}, 0, -\frac{3}{4})$ nach $(0, 0, \frac{3}{2})$, aus dem Bogen der Kurve $(16) \wedge b = 0$ von $(0, 0, \frac{3}{2})$ über $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ nach $(-\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4})$ und deren Bilder bei τ; der erwähnte Bogen hat die Parameterdarstellung $(19) \wedge b = 0$ und damit

$$a = -s^2 c \wedge b = 0 \wedge c = \tfrac{3}{2}(1 - 3s^2 + 4s^3)^{-1} \qquad (0 \leqq s \leqq 1);$$

$-a$ ist am größten für $2s^3 = 1$; daraus folgt

$$(a, b, c) \in K \Rightarrow |a| \leqq (2(4^{\frac{1}{3}} - 1))^{-1}.$$



Es bezeichne H' den Schnitt von H mit $a - b + c = 0$; nach dem Beweis von Satz C besteht H' aus T, B und deren Bilder bei τ; vermöge $c = \psi(t)$ in Satz 1 und $z = 2(1 - s)$ in Satz 2 erhält man zwei Parameterdarstellungen von B, welche vermöge $t = 1 - 2s$ ineinander übergehen. Man findet noch $(a, b, c) \in B \Rightarrow c \leqq \frac{3}{8}\left(2 + \sqrt{2}\right)$ und daher

$$(a, b, c) \in F_r \Rightarrow c \leqq \tfrac{3}{8}\left(2 + \sqrt{2}\right). \tag{20}$$

Es bezeichne H^+ den Schnitt von H mit $c = \frac{3}{2}$; wegen Satz 0, (20) und τ liegen alle Punkte von H^+ in D_o mit Ausnahme von $(0, 0, \frac{3}{2})$; wir verwenden (16) $\wedge\ c = \frac{3}{2}$: es ist $\left(-\frac{27}{32}, 0, \frac{3}{2}\right) \in H^+$; in $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) \in H^+$ ist die Tangente an H^+ zu $b = 0$ parallel.

Wir wissen: die beiden Schilde sind eben; die beiden Flanken sind die Vereinigung von Strecken; H ist stetig differenzierbar. Daher enthält jede Tangentialebene an K mindestens einen Punkt von $\bar{D}_o \cup D_u$, wo $\bar{D}_o$ die abgeschlossene Hülle von D_o bezeichnet. Für $Q \in \bar{D}_o \cup D_u$ bezeichne $\mathfrak{n}(Q)$ den äußeren Normaleinheitsvektor in Q an K und $L(Q)$ den Ursprungsabstand der Tangentialebene in Q an K. Wegen der Konvexität von K und der Stützeigenschaft der Tangentialebenen erhält man vermöge $Q \mapsto \mathfrak{n}(Q)$ $(Q \in \bar{D}_o \cup D_u)$ jeden Einheitsvektor mindestens einmal. Also gibt es zu jedem Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ mindestens ein $Q(\mathfrak{e}) \in \bar{D}_o \cup D_u$ mit $\mathfrak{e} = \mathfrak{n}(Q(\mathfrak{e}))$: $l(\mathfrak{e}) := L(Q(\mathfrak{e}))$ ist wohldefiniert. Insbesondere ist $l(\mathfrak{n}(Q)) = L(Q)$. Für $0 \leqq p \in \mathscr{R}$ sei $l(p\mathfrak{e}) := pl(\mathfrak{e})$. Wir identifizieren noch einen Vektor mit seiner Spitze als Ortsvektor. Die so entstehende Funktion $l : \mathscr{R}^3 \to \mathscr{R}$ heißt Stützfunktion von K, und $\tilde{K} := \{\tilde{Q} \in \mathscr{R}^3 : l(\tilde{Q}) \leqq 1\}$ heißt polarer Körper zu K. Nach Minkowski ist $\tilde{K}$ konvex mit dem Rand $\tilde{H} := \{\tilde{Q} \in \mathscr{R}^3 : l(\tilde{Q}) = 1\}$.

Es sei $\tilde{H}_0 := \left\{\frac{\mathfrak{n}(Q)}{L(Q)} : Q \in \bar{D}_o\right\}$. Wegen $D_u = \tau D_o$ und $\mathfrak{n}(\tau Q) = -\mathfrak{n}(Q)$, $L(\tau Q) = L(Q)$, $l\left(\frac{\mathfrak{n}(Q)}{L(Q)}\right) = \frac{l(\mathfrak{n}(Q))}{L(Q)} = 1$ $(Q \in \bar{D}_o)$ ist

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 \cup \tau \tilde{H}_0 . \tag{20}$$

Nach Satz 2 sind die Punkte (a, b, c) von D_o gekennzeichnet durch $0 \leqq s \leqq 1 \wedge |z| \leqq 2(1-s) \wedge (19)$. Für $Q = (a, b, c) \in \bar{D}_o$ mit (19) bezeichne Q_s bzw. Q_z die partielle Ableitung von Q nach s bzw. z. Für $Q \in \bar{D}_o$ ist

$$\frac{\mathfrak{n}(Q)}{L(Q)} = \frac{Q_s \times Q_z}{|Q_s Q_z Q|} .$$

Durch Ausrechnen folgt sofort

Satz D. *Es ist*

$$\tilde{H}_0 = \{(2 - 4s,\ 2sz,\ \tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{3}s^3 - sz^2) : 0 \leqq s \leqq 1 \wedge |z| \leqq 2(1-s)\} .$$

Für $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \in \tilde{H}_0$ gilt folglich

$$(2 - \tilde{a})(48\tilde{c} - 32 + (2 - \tilde{a})^3) + 48\tilde{b}^2 = 0 .$$

Es sei $\Delta := \tilde{H}_0 \cap \tau \tilde{H}_0$; mit $|z| = 2(1-s)$ in Satz D folgt

$$\Delta = \{(2 - 4s,\ \pm 4s(1-s),\ \tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{3}s^3 - 4s(1-s)^2 : 0 \leqq s \leqq 1\} .$$

Δ ist eine geschlossene Raumkurve; vermöge $s \mapsto 1 - s$ erhält man $\Delta = \tau\Delta$. Für festes s erhalten wir aus Satz D auf $\tilde{H}_0$ einen Parabelbogen, dessen Scheitel auf der ebenen Raumkurve $\{(2 - 4s,\ 0,\ \frac{2}{3} - \frac{4}{3}s^3) : 0 \leqq s \leqq 1\}$ liegt; $\tilde{H}_0$ ist die disjunkte Vereinigung von Parabelbögen. Zusammen mit (20) folgt, daß $\tilde{H}$ genau entlang Δ nicht differenzierbar ist.

Beispiele. Für $s = 0 \wedge z = 0$ erhält man $(0, 0, \frac{3}{2}) \in \bar{D}_o \subsetneqq H$ nach Satz 2 und $(2, 0, \frac{2}{3}) \in \tilde{H}$; das bedeutet geometrisch, daß $2a + \frac{2}{3}c = 1$ eine Gleichung der Tangentialebene in $(0, 0, \frac{3}{2})$ an H ist. Für $s = \frac{1}{2} \wedge z = 0$ erhält man $(-\frac{1}{2}, 0, 2) \in H$ und $(0, 0, \frac{1}{2}) \in \tilde{H}$, und $\frac{1}{2}c = 1$ beschreibt die Tangentialebene in $(-\frac{1}{2}, 0, 2)$ an H.

Allgemeiner sei $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{R}^n$ $(n > 1)$ und

$$J_n(\mathbf{a}) := \int_{-1}^{1} |a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}|\, dx ;$$

die Funktion $J_n : \mathscr{R}^n \to \mathscr{R}$ ist stetig. Es bezeichne K_n bzw. H_n die Menge aller $\mathbf{a}$ mit $J_n(\mathbf{a}) \leqq 1$ bzw. $J_n(\mathbf{a}) = 1$. (Auf Mengen dieser Art wurde ich während eines Vortrages von A. Douady am 29. 5. 1972 in München aufmerksam.) K_n ist konvex mit $(0, \ldots, 0)$ als Mittelpunkt und innerem Punkt: betrachtet man J_n auf $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, so folgt, daß K_n beschränkt ist: die stetige Hyperfläche H_n enthält die Punkte

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right), \left(0, \frac{2}{2}, 0, \ldots, 0\right), \ldots, \left(0, \ldots, 0, \frac{n}{2}\right).$$